Сумма и разность кубов двух выражений

Нам предстоит познакомиться ещё с двумя формулами сокращённого умножения:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Эта формула называется **суммой кубов**. Многочлен $\boldsymbol{a^2 - ab + b^2}$**,** стоящий во второй скобке, называют **неполным квадратом разности.** Обратите внимание, что **знак в меньшей скобке** совпадает со знаком между кубами двух выражений, а **знак в большой скобке** является противоположным.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Эта формула называется **разностью кубов**. Многочлен $\boldsymbol{a^2 + ab + b^2}$**,** стоящий во второй скобке, называют **неполным квадратом суммы.**

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Эти формулы можно доказать, перемножив многочлены, стоящие в правой части.

Эти формулы используются как слева направо, так и в обратную сторону.

Пример 1. Разложите на множители:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2).$

Пример 2. Представьте в виде произведения выражение:

$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)(x^4 + x^2y^3 + y^6).$

Пример 3. Упростите выражение $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$ и найдите его значение при $y = \frac{1}{2}$.

$(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 7.$

Пример 4. Разложите на множители:

$(m - 4)^3 + 216 = (m - 4)^3 + 6^3 = (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$

$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) = (m + 2)(m^2 - 14m + 76).$