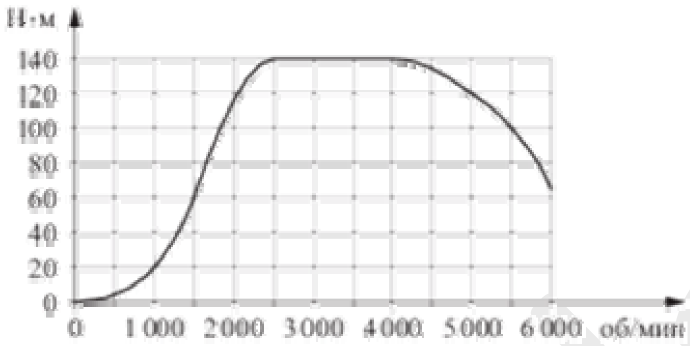
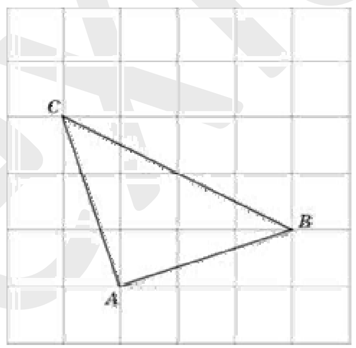
Часть 1

1. Цена на электрический чайник была повышена на 14% и составила 1596 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой $v = 0{,}036n$ где n — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был равен 120 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.



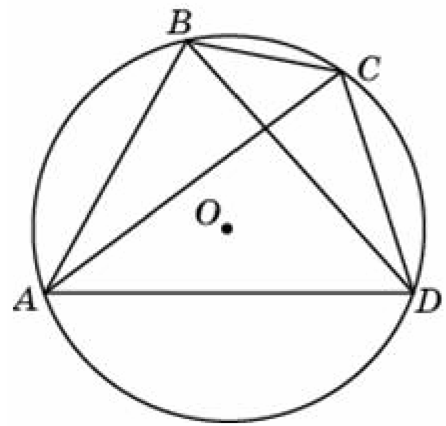
3. На клетчатой бумаге с размером клетки $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ изображен треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону BC.



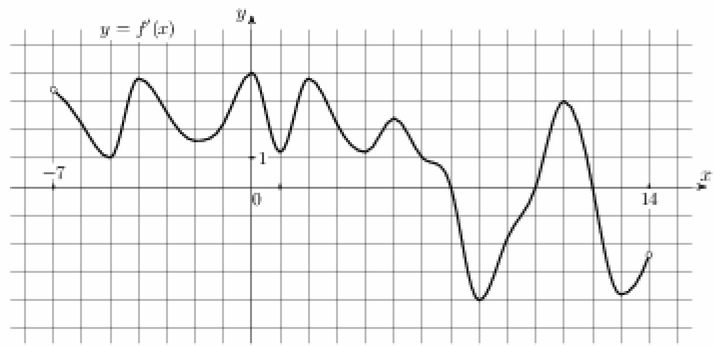
4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

5. Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$

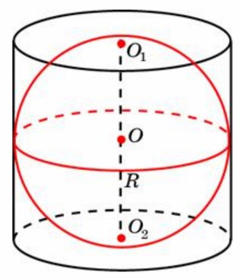
6. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 105^0, угол CAD равен 35^0. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале (-7; 14). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [-6;9].



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12}$

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием f = 30 см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y=\ln(x+5)^5-5x$

Условия заданий 13-19 представлены в нескольких разновидностях для различных типов вариантов

13.1 а) Решите уравнение $25^{\sin x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2}\sin 2x}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$

13.2 а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x)-7\log_2(2\sin x)+3=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

13.3 а) Решите уравнение $\log_8\left(7\sqrt{3}\sin x-\cos 2x-10\right)=0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$

14.1 На ребрах AB и BC треугольной пирамиды ABCD отмечены точки M и N соответственно, причем AM:MB =CN:NB=3:1. Точки P и Q – середины рёбер DA и DC соответственно
а) Докажите, что точки P,Q,M и N лежат в одной плоскости
б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды

14.2 Основанием четырехугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причем AB= $3\sqrt{2}$, BC=6. Высота пирамиды падает в центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB
а) Докажите, что точки P – середина BQ
б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если SD=9

14.3 В основании пирамиды PABCD - трапеция ABCD с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые AB и CD пересекаются в точке K.
а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.
б) Найдите объем PKBC, если AB=BC=CD=3, а высота пирамиды PABCD равна 8.

15.1 Решите неравенство: $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x-2}+\frac{\log_5 x-2}{\log_5(25x)}\geq\frac{6-\log_5 x^4}{\log_5^2 x-4}$

15.2 Решите неравенство: $\dfrac{\log_2(4x^2)+35}{\log_2^2 x-36} \geq -1$

15.3 Решите неравенство: $\dfrac{3^x}{3^x-3}+\dfrac{3^x+1}{3^x-2}+\dfrac{5}{9^x-5\cdot 3^x+6} \leq 0$

16.1 Точка E – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На её стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.
а) Докажите, что CO=KO.
б) Найдите отношение оснований трапеции BC : AD, если площадь треугольника BCK составляет $\dfrac{9}{64}$ площади всей трапеции ABCD.

16.2 Основания трапеции равны 4 и 9, а её диагонали равны 5 и 12.
а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.
б) Найдите высоту трапеции.

16.3 Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекает вторую окружность в точках D и E соответственно.
а) Докажите, что треугольники CBD и O_1AO_2 подобны.
б) Найти AD, если углы DAE и BAC равны, радиус второй окружности в четыре раза больше радиус первой и AB=2.

16.4 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от точки A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.
а) Докажите что прямые PQ и BC параллельны
б) Известно, что $\sin\angle AOC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение QK:KA

17.1 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга
Найдите r, если известно, что если выплачивать по 777600 рублей , то кредит будет погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 1317600 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года?

17.2 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 77200 рублей?

17.3 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга
Найдите число r, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 330000 рублей, а во второй год – 121000 рублей.

18.1 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x = -\sqrt{x-a}\cdot\cos x$$
имеет ровно один корень на отрезке $[0;\pi]$

18.2 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\sqrt{2x-1}\cdot\ln(4x-a) = \sqrt{2x-1}\cdot\ln(5x+a)$$
имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$

18.3 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2} = 0$$
имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$

18.4 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln(x^2-6x+10-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$

19.1 Каждый из 32 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 14. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за нее). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно S.

а) Приведите пример, когда S<14

б) Могло ли значение S быть равным 7?

в) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные работы писали 12 студентов?

19.2 На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

а) Может ли на доске быть ровно 24 четных числа?

б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

19.3 На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130

а) Может ли оказаться, что на доске написано число 240?

б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 16?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 16, может быть на доске?