Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке (3 способа)

Рассмотрим первый случай. Пусть функция $y = f(x)$ не имеет на отрезке $[a;b]$ стационарных точек. Тогда она возрастает (рис. 1) или убывает (рис. 2) на этом отрезке. Значит, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[a;b]$ – это значения в концах a и b.

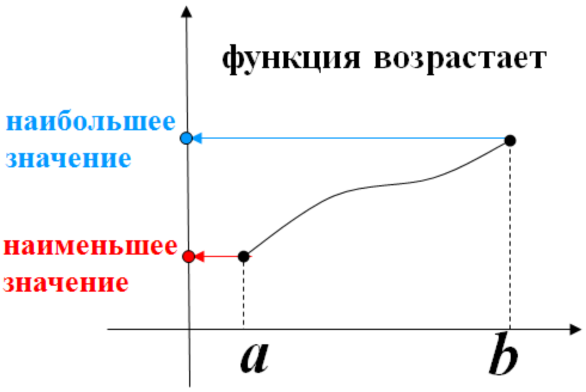


рис 1

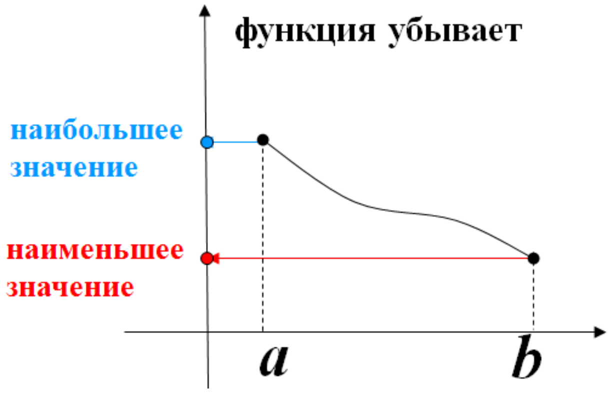


рис 2

Теорема 1. Если функция монотонно возрастает на отрезке $[a;b]$, то на левом конце она принимает наименьшее значение, а на правом – наибольшее значение (рис 1). Если функция монотонно убывает на отрезке $[a;b]$, то на левом конце она принимает наибольшее значение, а на правом – наименьшее значение (рис 1).

Рассмотрим второй случай. Пусть теперь функция f имеет на отрезке $[a;b]$ конечное число стационарных или критических точек (рис 3 и 4). Наибольшее и наименьшее значения функция f может принимать в стационарных или критических точках функции или в точках a и b.

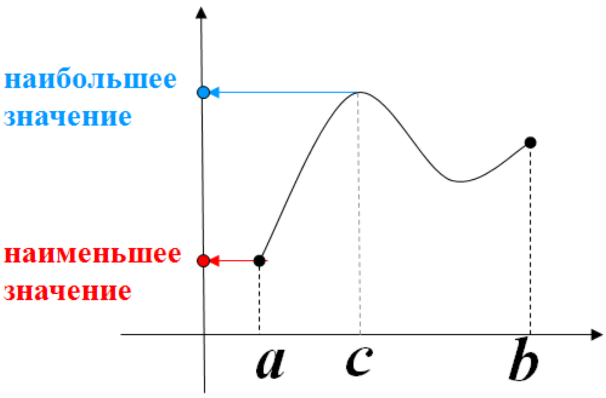


рис 3

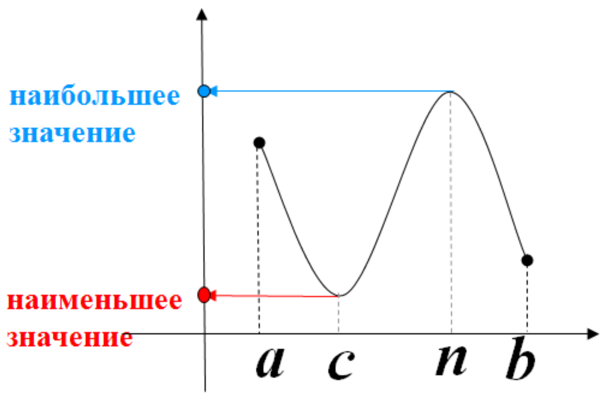


рис 4

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических и стационарных точек, нужно вычислить значения функции во всех критических и стационарных точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$

1. Найти производную данной функции.
2. Найти критические и стационарные точки функции. Отобрать из них те, которые принадлежат данному промежутку.
3. Вычислить значения функции в отобранных точках. Вычислить значения функции на концах данного промежутка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.
4. Выбрать наибольшее ($y_{наиб}$) и наименьшее ($y_{наим}$) значения функции.

Рассмотрим третий случай (рис 5 и 6).

Теорема 2. Предположим, что непрерывная функция f имеет на отрезке $[a;b]$ **одну** точку экстремума (максимума или минимума).

Если это точка минимума, то в этой точке функция будет принимать наименьшее значение.

Если это точка максимума, то в этой точке функция будет принимать наибольшее значение.

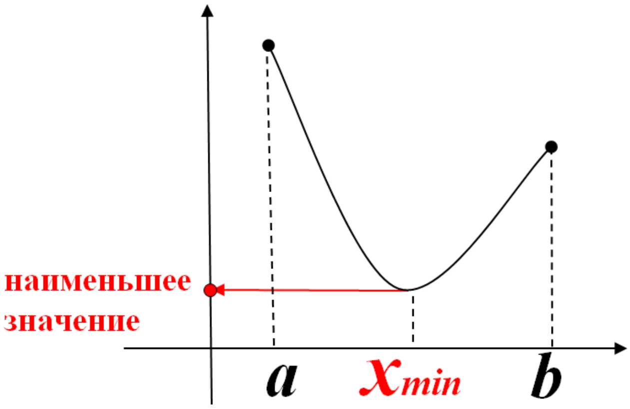


рис 5

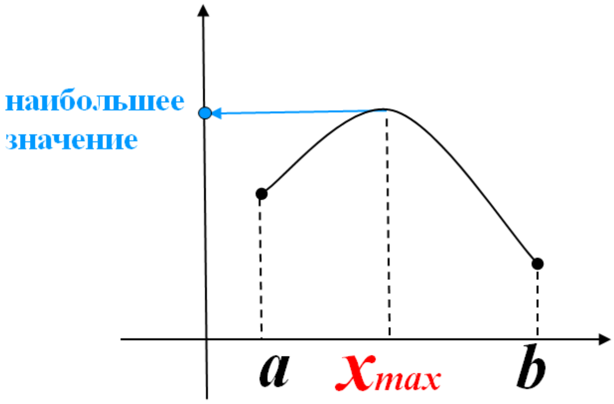


рис 6

<u>Вывод:</u>

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке можно:
- по алгоритму (слайд 4),
- используя теорему 1 (слайд 3)
- используя теорему 2 (слайд 5).

Приведём примеры на все три случая.

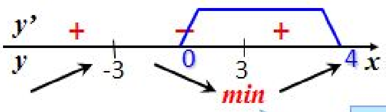
Пример 1 (решение по алгоритму)

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0;\ 4]$
1. Найти $f\,'(x)$	$y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические и стационарные точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x-3)(x+3)$ $x = 3 \in [0;\ 4]$ $x = -3 \notin [0;\ 4]$
3. Вычислить значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.	$y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	$\boldsymbol{y_{наим.} = -54}$ **[0;4]**

Пример 2 (решение по теореме 1)

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = 9\cos x + 10x + 8$ на отрезке $[0;\ 3\pi/2]$
1. Найти $f\,'(x)$	$y' = -9\sin x + 10$
~~2. Найти критические и стационарные точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.~~	$y' = -9\sin x + 10 > 0$, т.к. $-1 \le \sin x \le 1 / \cdot(-9)$ $-9 \le -9\sin x \le 9 / +10$ $-9+10 \le -9\sin x + 10 \le 9+10$, $1 \le -9\sin x + 10 \le 19$ **Этот способ можно использовать только при условии монотонности функции на отрезке!**
~~3. Вычислить значения функции в стационарных точках и на концах отрезка.~~	Т.к. $y' > 0$, то функция монотонно возрастает. Воспользуемся теоремой 1 (Если функция монотонно возрастает на отрезке $[a;b]$, то на левом конце она принимает наименьшее значение).
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее~~	$y_{наим.} = y(0) = 9\cos 0 + 10 \cdot 0 + 8 = 9 + 0 + 8 = 17$ **Ответ: 17**

Пример 3 (решение по теореме 2)

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$
1. Найти $f'(x)$	$y' = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x - 3)(x + 3)$ 
3. Вычислить значения функции в критических точках ~~и на концах отрезка.~~	$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее~~	$\underset{[0;4]}{y_{наим.}} = -54$ **Этот способ будет удобно вспомнить, когда вычисления значений функции в концах отрезка будет сложным!**

Наименьшее значение функция будет принимать в точке минимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.