Применение производной для исследования функций.
Точки экстремума функции. Стационарные и критические точки. Точки перегиба

Определение 1-2.
Точки экстремума – это точки максимума и минимума функции. Обозначают x_{max}, x_{min}.
Экстремумы функции – это значения функции в точках экстремума. Обозначают y_{max}, y_{min}.

Замечание: Не следует путать экстремумы функции с наибольшими и наименьшими значениями функции. Экстремумы функции находят в окрестности точки, а наибольшее и наименьшее значения функции – на всей области определения функции. Точек экстремума и экстремумы функция может несколько, а вот наибольшее значение и наименьшее значения функции единственные на всей области определения.

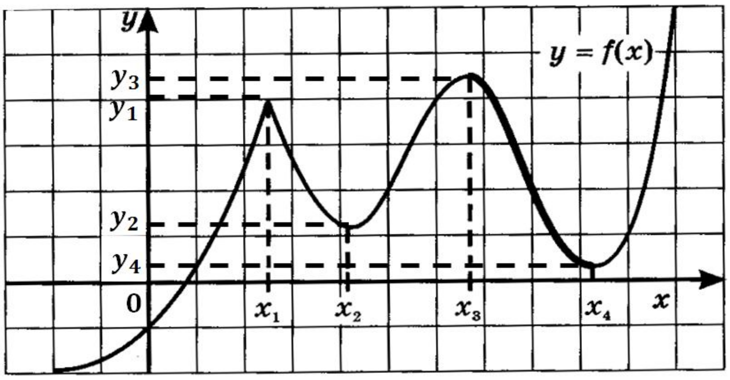


Рис 1

С помощью графика мы уже умеем определять точки экстремума (абсциссы точек) и экстремумы функции (ординаты этих же точек).

На данном рисунке точками экстремума являются точки x_1, x_2, x_3, x_4. Кроме того, мы видим, что точки x_1 и x_3 являются точками максимума функции, а x_2 и x_4 – точки минимума функции, y_1, y_2, y_3, y_4 – экстремумы функции.

Научимся определять точки экстремума, не используя график функции. Для этого вспомним следующую схему о связи производной с монотонностью функции.

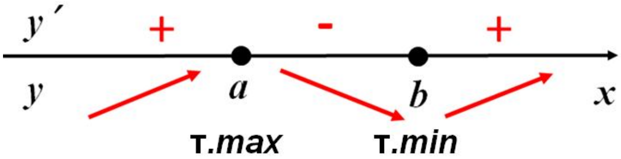


Рис 2

Глядя на эту схему становятся понятны следующие определения:

Определения 3-5:
1. Если при переходе через точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с **«+» на «–»**, то x_0 – **точка максимума** функции $f(x)$.

2. Если при переходе через точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с **«–» на «+»**, то x_0 – **точка минимума** функции $f(x)$.

3. Если в точке x_0 при производная равна нулю, но при переходе через неё **не меняет знак**, то x_0 – **точка перегиба** функции $f(x)$. В точке перегиба происходит изменение выпуклости графика функции, но не происходит изменение монотонности. На рисунке 3 точкой перегиба является точка $x = 2$.

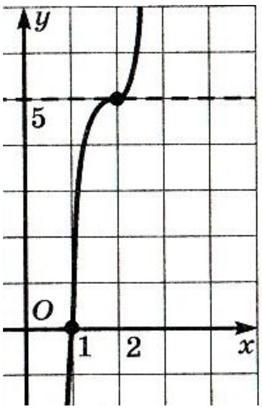


Рис 3

Рассмотрим графики функций на рисунках 4 и 5.

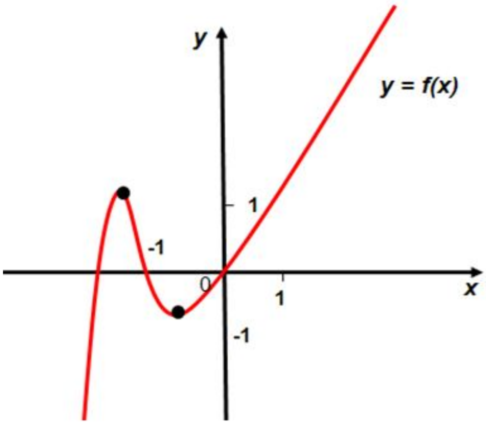


Рис 4

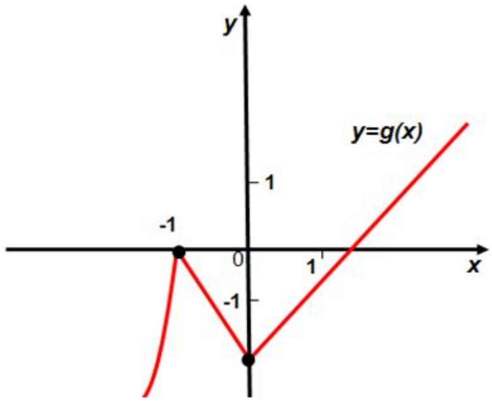


Рис 5

На рисунке 4 **касательные** в двух отмеченных точках графика (если их провести) будут **параллельны оси** *Ox*, поэтому **производная в этих точках равна 0**.

На рисунке 5 **касательные** в отмеченных точках графика **провести нельзя**, поэтому **производная** в этих точках **не существует**. Все рассмотренные четыре точки являются точками экстремума функции.

Определения 6-7:
Внутренние точки (значит, точно не на концах) области определения функции, в которых **производная равна нулю,** называют ***стационарными точками*** (рис. 3).

Внутренние точки области определения функции, в которых **производная не существует,** называют ***критическими точками*** (рис. 4).

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти производную $f'(x)$. Найти критические точки функции ($f'(x)$ не существует).
3. Найти стационарные точки, для этого решить уравнение $f'(x) = 0$.
4. Отметить стационарные и критические точки (если они есть) на числовой прямой. Определить знаки производной на получившихся промежутках.
5. По знаку производной определить промежутки монотонности и точки экстремума функции.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ на монотонность и экстремумы.

1. $D(f) = (-\infty;+\infty)$.
2. $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x$.

$D(f') = (-\infty;+\infty)$, значит, нет точек, в которых производная не существует, поэтому нет критических точек.

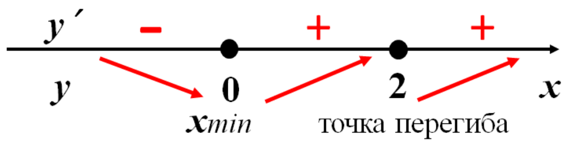
3. $f'(x) = 0$, $12x^3 - 48x^2 + 48x = 0 \mid : 12$

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

$x^2(x^2 - 4x + 4) = 0$

$x = 0$, $x = 2$ – стационарные точки.

4.



5. $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty; 0]$, $f(x)$ возрастает при $x \in [0; +\infty)$, $x_{min} = 0$, $x = 2$ – точка перегиба.

Пример 2. Исследуйте функцию $y = \frac{1}{x+3}$ на монотонность и экстремумы.

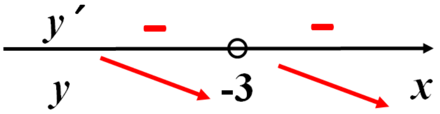
1. $D(y)$: $x + 3 \neq 0$, $x \neq -3$, $D(y) = (-\infty;-3), (-3;+\infty)$.
2. $y' = (x+3)'\left(\frac{1}{x+3}\right)' = 1 \cdot \left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right) = -\frac{1}{(x+3)^2}$.

$D(f')$: $x + 3 \neq 0$, $x \neq -3$, $D(f') = (-\infty;-3), (-3;+\infty)$. $D(f') = D(y)$ => нет критических точек.

Замечание: В точке $x = -3$ производная не существует. Может показаться, что это и есть критическая точка, но в этой точке функция не существует, этой точки нет (выколотая точка).

3. $y' = 0$, $-\frac{1}{(x+3)^2} = 0$, нет корней, значит, нет стационарных точек.

4.



Точка $x = -3$ не является точкой перегиба, это точка разрыва функции.

5. $f(x)$ убывает при $x \in (-\infty;-3), (-3;+\infty)$. Точек экстремумов нет.

№ 44.59 (а) Исследуйте функцию $y = \sin x - \frac{1}{2}x$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $y' = \cos x - \frac{1}{2}$, $D(y') = (-\infty; +\infty) \Rightarrow$ нет критических точек.
3. $y' = 0$, $\cos x - \frac{1}{2} = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

$n = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$, $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$.

$n = 1$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi^{(3} = \frac{5\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi^{(3} = \frac{7\pi}{3}$.

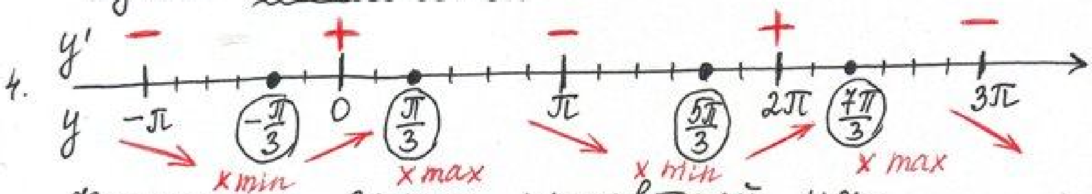
...

Отметим эти точки на координатной прямой.

$\ldots; -\frac{\pi}{3}; +\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \ldots$

Пусть $\pi = 6$ клеток

4.



Вычислим знаки производной на получившихся промежутках:

$y'(-\pi) = \cos(-\pi) - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -1{,}5 < 0$

$y'(0) = \cos 0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5 > 0$

$y'(\pi) = \cos\pi - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -1{,}5 < 0$

$y'(2\pi) = \cos 2\pi - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 0{,}5 > 0$

$y'(3\pi) = \cos 3\pi - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = -1{,}5 < 0$

5. $y\downarrow$ при $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$;

$y\nearrow$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

$x_{min} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$x_{max} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.