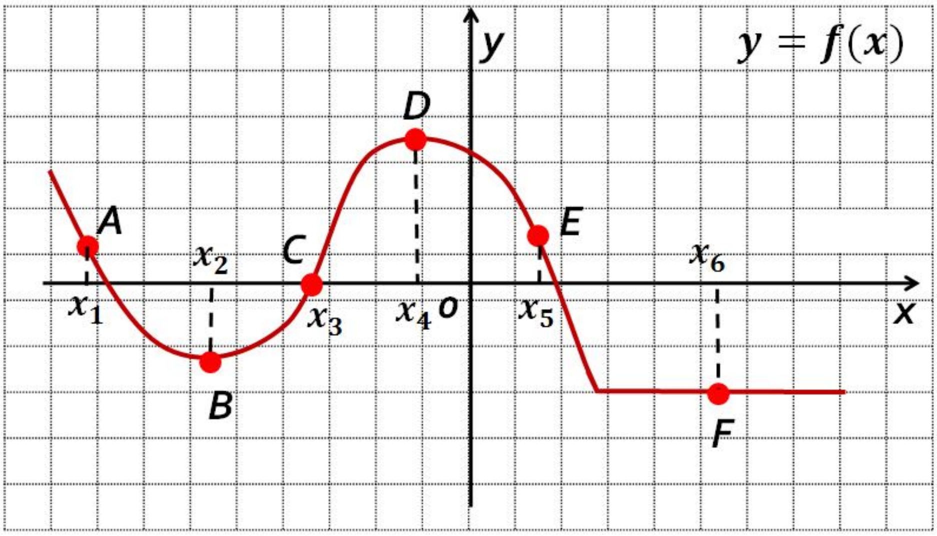
Применение производной
для исследования функций на монотонность

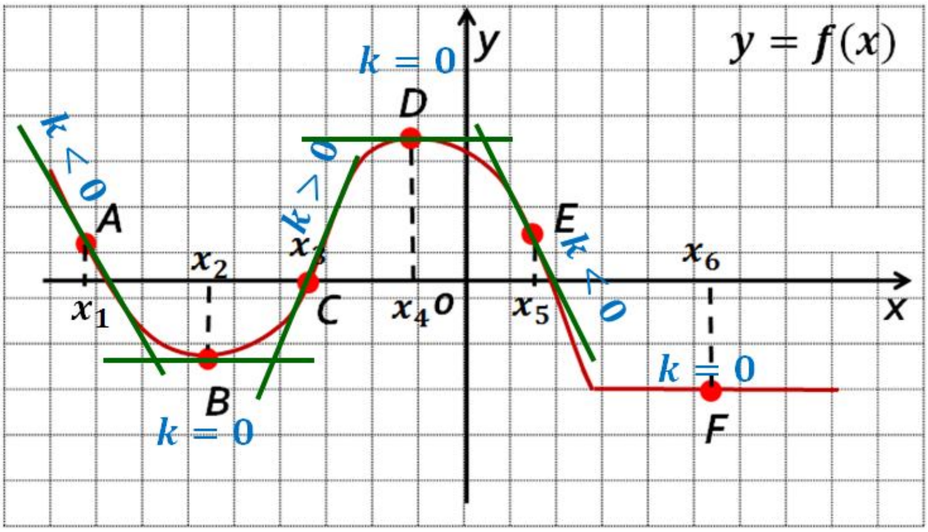
Исследовать функцию на монотонность – это значит указать промежутки возрастания, убывания и постоянства функции.

Вопрос: Как связаны **монотонность** функции и **производная**?

Попробуем ответить на этот вопрос. Для этого определим знаки производной и поведение функции в отмеченных на рисунке точках.



Вспомним, что $\boldsymbol{f'(x_0) = k}$, где k – угловой коэффициента касательной, проведённой к графику в точке $\boldsymbol{x_0}$.

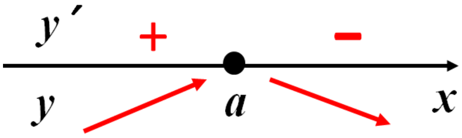


$k_1 = f'(x_1) < 0$, в точке x_1 функция убывает;
$k_2 = f'(x_2) = 0$, точка x_2 относится как к промежутку убывания, так и промежутку возрастания функции;
$k_3 = f'(x_3) > 0$, в точке x_3 функция возрастает;
$k_4 = f'(x_4) = 0$, точка x_4 относится как к промежутку убывания, так и промежутку возрастания функции;
$k_5 = f'(x_5) < 0$, в точке x_5 функция убывает;
$k_6 = f'(x_6) = 0$, в точке x_6 функция постоянна.

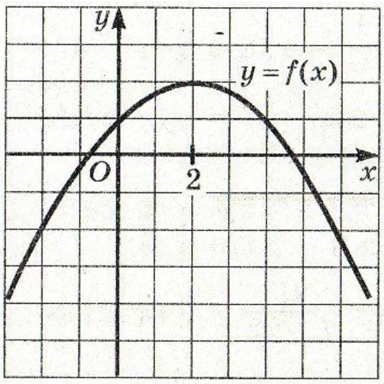
Теорема:
Пусть $y = f(x)$ – непрерывная на промежутке функция.
а) если $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ (причём $f'(x) = 0$ лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то ***f(x)* – возрастает**;

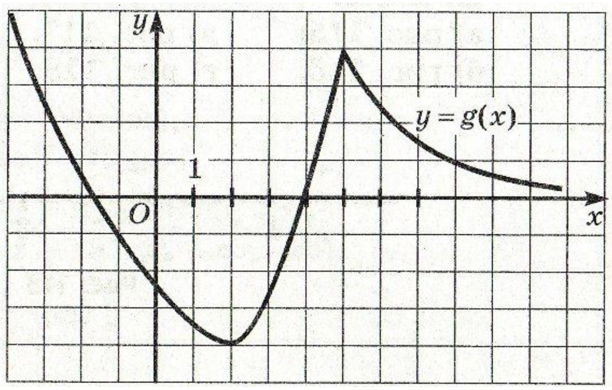
б) если $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ (причём $f'(x) = 0$ лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то $\boldsymbol{f(x)}$ **– убывает**;
в) если $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ на сплошном промежутке, то $\boldsymbol{f(x)}$ **– постоянна** (*const*).

В виде **схемы** эту теорему можно представить так:



Пример 1. Используя графики функций, решите неравенства:
а) $f'(x) < 0$; б) $f'(x) \geq 0$; в) $g'(x) > 0$.





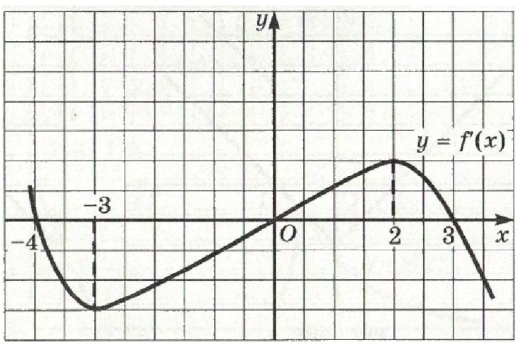
Решение:
а) $f'(x) < 0$, поэтому угловой коэффициента касательной $k < 0$, поэтому функция должна убывать, по рисунку находим такой промежуток $x \in (2; +\infty)$. *Примечание:* Саму точку $x = 2$ в промежуток не включаем, т.к. в этой точке производная равна нулю, а по условию $f'(x) < 0$.

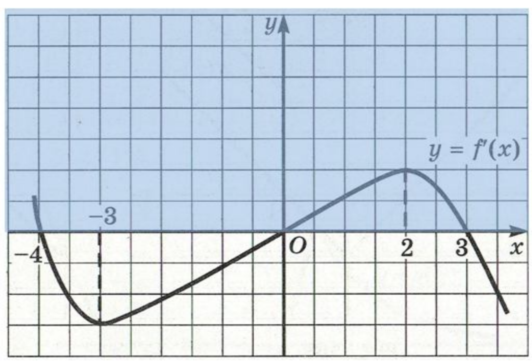
б) $f'(x) \geq 0$, поэтому угловой коэффициента касательной $k \geq 0$, поэтому функция должна возрастать, по рисунку находим такой промежуток $x \in (-\infty; 2]$.

в) $g'(x) < 0$, поэтому угловой коэффициента касательной $k < 0$, поэтому функция должна убывать, по рисунку находим два таких промежутка $x \in (-\infty; 2)$ и $(5; +\infty)$. *Примечание:* Точку $x = 2$ в промежуток не включаем, т.к. в этой точке производная равна нулю, а в точке $x = 5$ производная не существует (а по условию $g'(x) < 0$).

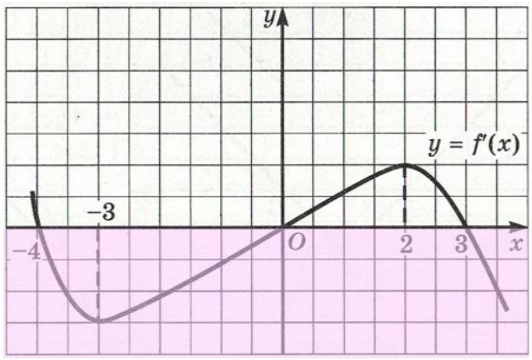
Примечание: Теорему можно использовать для выполнения обратных заданий. По графику производной функции можно находить промежутки возрастания и убывания функции.

Пример 2. По графику производной функции $y = f(x)$, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$ возрастания, а на каких убывает:



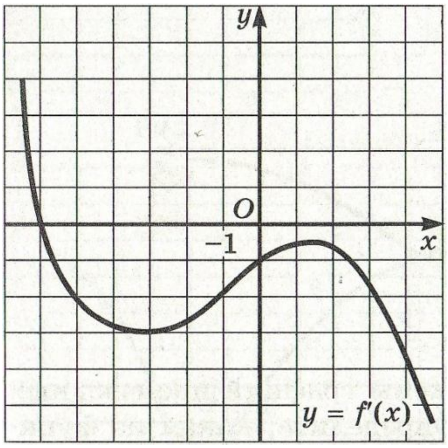


На графике изображён график производной. Чтобы определить где функция $y = f(x)$ возрастает, нужно определить где $f'(x) \geq 0$, т.е. данный график производной расположен выше оси x или совпадает с ней, поэтому $x \in (-\infty; 4]$ и $[0; 3]$.



Чтобы определить где функция $y = f(x)$ убывает, нужно определить где $f'(x) \leq 0$, т.е. данный график производной расположен ниже оси x или совпадает с ней, поэтому $x \in [-4; 0]$ и $[3; +\infty)$.

Пример 3. По графику производной функции $y = f(x)$, определите, на каких промежутках функция $y = f(x)$ возрастания, а на каких убывает:



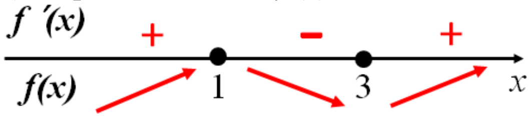
На графике изображён график производной. Чтобы определить где функция $y = f(x)$ возрастает, нужно определить где $f'(x) \geq 0$, т.е. график производной расположен выше оси x или совпадает с ней, поэтому $x \in (-\infty; -6]$. Чтобы определить где функция $y = f(x)$ убывает, нужно определить где $f'(x) \leq 0$, т.е. график производной расположен ниже оси x или совпадает с ней, поэтому $x \in [-6; +\infty)$.

Используя новую теорему, можно находить промежутки монотонности функции, не имея перед газами график функции.

Пример 4. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Решение:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
3) $f'(x) = 0$, $3x^2 - 12x + 9 = 0$,
$x^2 - 4x + 3 = 0$,
$x = 1$ и $x = 3$,
4) Определим знаки $f'(x)$.



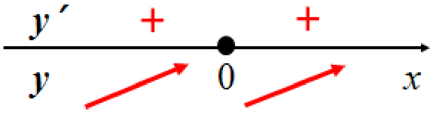
5) $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; 1]$, $[3; +\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in [1; 3]$

Пример 5. Докажите, что функция $f(x) = x^5 + 2x^3 - 4$ монотонна на все числовой прямой. Укажите характер её монотонности.

Решение (1 способ):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2) $f'(x) = 5x^4 + 6x^2$
3) $f'(x) = 0$, $5x^4 + 6x^2 = 0$
$x^2(5x^2 + 6) = 0$,
$x = 0$ и $x^2 = -1{,}2$ (нет корней).

4) Определим знаки производной.



5) $f(x)$ возрастает при $x\in(-\infty; +\infty)$.

Решение (2 способ):

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2$

Замечаем, что $f'(x) \geq 0$ при всех значениях x, поэтому данная функция возрастает на всей области определения.

Функция возрастает при $x\in(-\infty; +\infty)$.

Пример 6. Докажите, что функция $f(x) = x - \cos x + 8$ монотонна на все числовой прямой. Укажите характер её монотонности.

Решение (2 способ):

1) $D(f) = (-\infty;+\infty)$.

2) $f'(x) = 1 + \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1 \,|\, +1$

$-1 + 1 \leq \sin x + 1 \leq 1 + 1$

$0 \leq \sin x + 1 \leq 2$

Значит, $f'(x) \geq 0$ при любых значениях x. Функция возрастает при $x\in(-\infty; +\infty)$.

Пример 7. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = \frac{3x-1}{3x+1}$.

Решение:

1) $D(f)$: $3x + 1 \neq 0$, $x \neq -1/3$, $x\in(-\infty;-1/3)$; $(-1/3;+\infty)$.

2) $f'(x) = = \frac{(3x+1)'(3x-1)-(3x-1)'(3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{6}{(3x+1)^2}$

Замечаем, что $f'(x) = \frac{6}{(3x+1)^2} > 0$ при всех значения x из области определения.

3) $f(x)$ возрастает при $x\in(-\infty;-1/3)$; $(-1/3;+\infty)$.