

## Замечания по использованию метода координат

1. Не все задачи №14 ЕГЭ (профиль) можно решить методом координат (в силу недостаточности школьной теории).
2. Есть задачи, которые решаются методом координат, но решение является громоздким, а вычислительная ошибка сводит все труды ученика к 0 баллов.
3. Некоторые стереометрические задачи легче решаются без использования метода координат.
4. Очень редко (!) обе части (а и б) задачи №14 ЕГЭ можно решить методом координат.

## Используя метод координат, решите следующие задачи ЕГЭ (выделены цветом):

### Равенство отрезков

#### 1. (526703)

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  рёбра равны 1. На продолжении отрезка  $A_1 C_1$  за точку  $C_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $A_1 C_1 = C_1 M$ , а на продолжении отрезка  $B_1 C$  за точку  $C$  отмечена точка  $N$  так, что  $B_1 C = CN$ .

а) Докажите, что  $MN = MB_1$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $B_1 C_1$  и  $MN$ .

#### 2. (514520)

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона  $AB$  основания равна  $2\sqrt{3}$ , а высота  $SH$  пирамиды равна 3. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $CD$  и  $AB$ , соответственно, а  $NT$  — высота пирамиды  $NSCD$  с вершиной  $N$  и основанием  $SCD$ .

а) Докажите, что точка  $T$  является серединой  $SM$ .

б) Найдите расстояние между  $NT$  и  $SC$ .

**Подсказка:** Доказать, что в равнобедренном треугольнике высота является медианой.

### Угол между прямыми

#### 3. (530456)

Точки  $P$  и  $Q$  — середины рёбер  $AD$  и  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно.

а) Докажите, что прямая  $BQ$  перпендикулярна прямой  $B_1 P$ .

б) Пусть  $H$  — проекция точки  $Q$  на прямую  $B_1 P$ . Найдите  $PH$ , если  $AB = 12$ .

#### 4. (520822)

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AC$  и  $BC_1$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $AC$  и  $BC_1$ .

#### 5. (500112)

Точка  $E$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $BE$  и  $AD$  равен углу  $CBE$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AD$ .

**Ответ:** б)  $\arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$  (или  $\arctg \frac{1}{2}$  или  $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ ).

#### 6. (517563)

Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $C$ . Грань  $ACC_1 A_1$  является квадратом.

а) Докажите, что прямые  $CA_1$  и  $AB_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ , если  $AC = 4$ ,  $BC = 7$ .

#### 7. (507788)

Сторона основания правильной треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  равна 8. Высота этой призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую  $AB_1$  и параллельная прямой  $CA_1$  проходит через середину ребра  $BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $CA_1$  и  $AB_1$ .

**Ответ:** б)  $\arccos \frac{1}{2\sqrt{5}}$  или  $2\arcsin \frac{2\sqrt{3}}{5}$ .

#### 8. (507634)

Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна 1.  $M$  — середина ребра  $BC$ ,  $L$  — середина ребра  $AB$ .

а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой  $CL$  и содержащая прямую  $DM$ , делит ребро  $AB$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $A$ .

б) Найдите угол между прямыми  $DM$  и  $CL$ .

Ответ: б)  $\arccos \frac{1}{6}$ .

### 9. (520995)

В правильном тетраэдре  $ABCD$  точка  $H$  – центр грани  $ABC$ , а точка  $M$  – середина ребра  $CD$ .

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $DH$  и  $BM$ .

Ответ: б)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

### Расстояние от точки до плоскости

#### 10. (517200)

В основании пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со стороной  $AB = 4$  и диагональю  $BD = 7$ . Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали  $BD$  основания  $ABCD$  отмечена точка  $E$ , а на ребре  $AS$  — точка  $F$  так, что  $SF = BE = 3$ .

а) Докажите, что плоскость  $CEF$  параллельна ребру  $SB$ .

б) Плоскость  $CEF$  пересекает ребро  $SD$  в точке  $Q$ . Найдите расстояние от точки  $Q$  до плоскости  $ABC$ .

Ответ: б)  $\frac{2\sqrt{15}}{7}$ .

#### 11. (549672)

В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  на боковых ребрах  $AA_1$  и  $DD_1$  взяты соответственно точки  $K$  и  $M$  так, что  $AK : A_1 K = 2 : 3$ ,  $DM : D_1 M = 4 : 1$ .

а) Докажите, что плоскость  $BMK$  параллельна прямой  $AC$ .

б) Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BMK$ , если  $AB = 8$ ,  $AA_1 = 10$ .

Ответ: б)  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ .

### Угол между плоскостями

#### 12. (512993)

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известны рёбра  $AB = 35$ ,  $AD = 12$ ,  $CC_1 = 21$ .

а) Докажите, что высоты треугольников  $ABD$  и  $A_1 B D$ , проведённые к стороне  $BD$ , имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $A_1 D B$ .

Ответ: б)  $\arctg \frac{37}{20}$  (возможна другая форма ответа, если решать через косинус угла).

#### 13. (513264)

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $AC B_1$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $AD_1 C_1$  и  $A_1 D_1 C$ .

Ответ: б)  $60^\circ$ .

#### 14. (513256)

В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости  $AA_1 D_1$  и  $DB_1 F_1$  перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями  $ABC$  и  $DB_1 F_1$ .

**Подсказка:** Найти косинус угла между плоскостями, а затем, используя основное тригонометрическое тождество, найдите тангенс угла.

#### 15. (509202)

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все рёбра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  построена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

а) Докажите, что  $A_1 P : PB_1 = 2 : 1$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1 B_1$ .

б) Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1 C_1 C$ .

### Угол между прямыми. Угол между плоскостями

16. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$  со сторонами  $AB = 8$  и  $BC = 6$ . Длины боковых рёбер пирамиды  $SA = \sqrt{21}$ ,  $SB = \sqrt{85}$ ,  $SD = \sqrt{57}$ .

а) Докажите, что  $SA$  – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми  $SC$  и  $BD$ .

Ответ: б)  $\arccos \frac{14}{55}$ .

**Подсказка:** а) использовать признак перпендикулярности прямой и плоскости (доказать, что ребро  $SA$  перпендикулярно двум прямым основания, т.е. скалярное произведение равно нулю).

**17. (513428)**

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , все рёбра которой равны 4. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.  
б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .

**18. (516332)**

Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки  $A$ ,  $C_1$  и середину  $T$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.  
б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .

**19. (515782)**

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все рёбра равны 1.

- а) Докажите, что прямая  $AB_1$  параллельна прямой, проходящей через середины отрезков  $AC$  и  $BC_1$ .  
б) Найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$ .

**Подсказка:** а) доказать, что косинус угла равен 1.

Ответ: б)  $\frac{1}{4}$ .

**20. (510019)**

Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.  
б) Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

**Внимание:** В данной задаче методом координат можно решить обе части (хотя бы под буквой а)

Ответ: б)  $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$  (или  $\arccos \sqrt{\frac{5}{8}}$ ).

**21. (514447)**

В правильной треугольной призме  $ABCA'B'C'$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA'$  равно 3. На ребре  $AB$  отмечена точка  $K$  так, что  $AK = 1$ . Точки  $M$  и  $L$  – середины рёбер  $A'C'$  и  $B'C'$  соответственно. Плоскость  $\gamma$  параллельна прямой  $AC$  и содержит точки  $K$  и  $L$ .

- а) Докажите, что прямая  $BM$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $\gamma$ .

**22. (511106)**

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$ , все рёбра которой равны 4, точка  $N$  – середина ребра  $AC$ , точка  $O$  центр основания пирамиды, точка  $P$  делит отрезок  $SO$  в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

- а) Докажите, что прямая  $NP$  перпендикулярна прямой  $BS$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $NP$ .

**23. (514603)**

На рёбрах  $CD$  и  $BB_1$  куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром 12 отмечены точки  $P$  и  $Q$  соответственно, причём  $DP = 4$ , а  $B_1Q = 3$ . Плоскость  $APQ$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $M$ .

- а) Докажите, что точка  $M$  является серединой ребра  $CC_1$ .  
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до плоскости  $APQ$ .

Ответ: б)  $\frac{12\sqrt{26}}{13}$ .

**24. (514245)**

В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  все рёбра равны 5. На рёбрах  $SA$ ,  $AB$ ,  $BC$  взяты точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  соответственно так, что  $PA = AQ = RC = 2$ .

- а) Докажите, что плоскость  $PQR$  перпендикулярна ребру  $SD$ .  
б) Найдите расстояние от вершины  $D$  до плоскости  $PQR$ .

Ответ: 3,5.