Метод координат

При решении стереометрической задачи №14 ЕГЭ (профиль) можно применять ***векторно-координатный метод*** или сокращённо ***метод координат***.

Метод координат используется:
а) для доказательства **<u>равенства отрезков</u>** (если удаётся найти координаты концов отрезков).
б) для нахождения **<u>угла между прямыми</u>** (если удаётся найти координаты векторов, лежащих на данных прямых), в частности доказательства, что **прямые параллельны или перпендикулярны**;
в) для нахождения **<u>угла между плоскостями</u>** (если удаётся составить уравнения данных плоскостей), в частности доказательства, что **плоскости параллельны или перпендикулярны**;
г) для нахождения **<u>расстояния от точки до плоскости</u>** (если удаётся найти координаты точки и составить уравнение плоскости);
д) для нахождения **<u>угла между прямой и плоскостью</u>** (если удаётся составить уравнение плоскости)
е) для нахождения **<u>расстояния между скрещивающимися прямыми</u>** (если удаётся составить уравнение плоскости).

Алгоритм решения задач методом координат:
1. Ввести прямоугольную систему координат.
2. Найти координаты необходимых точек в выбранной системе координат.
3. Использовать алгоритм нахождения угла между прямыми, угла между плоскостями и т.д.

Для использования метода координат необходимо знать следующую теорию.

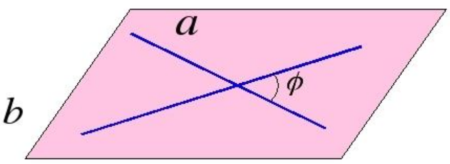
<u>1. Координаты вектора</u>

Для того чтобы определить координаты вектора, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала вектора. Пусть у нас есть две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ можно определить по формуле:

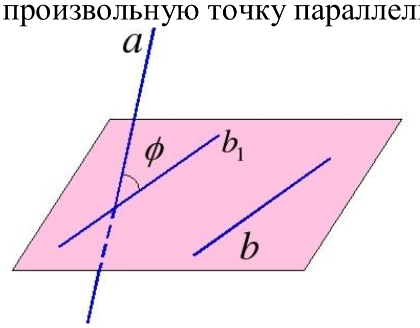
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}}$$

<u>2. Угол между прямыми</u>

Углом между прямыми в пространстве называют острый из вертикальных углов, образованных двумя прямыми, проведёнными через произвольную точку параллельно данным прямым.



Пересекающиеся прямые



Скрещивающиеся прямые

Существует формула для нахождения косинуса угла между прямыми (векторами). Пусть даны два вектора: $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, тогда угол α между прямыми находится по формуле:

$$\boxed{cos\alpha = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}}$$

<u>3. Уравнение плоскости, нормаль</u>

Нужно уметь выводить уравнение плоскости. В общем виде уравнение плоскости задается формулой:

$$\boxed{A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,}$$

где A, B, C, D – некоторые числа.

Если найти A, B, C, D, то легко составляется уравнение плоскости. Плоскость однозначно задается тремя точками в пространстве, значит нужно найти координаты трех точек, лежащих в данной плоскости, а потом подставить их в общее уравнение плоскости.

Пусть даны три точки: $K(x_1; y_1; z_1), P(x_2; y_2; z_2), L(x_3; y_3; z_3)$.

Подставим координаты точек в общее уравнение плоскости:

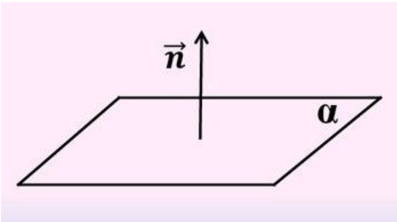
$$\begin{cases} A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C \cdot z_1 + D = 0, \\ A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C \cdot z_2 + D = 0, \\ A \cdot x_3 + B \cdot y_3 + C \cdot z_3 + D = 0. \end{cases}$$

Получилась система из трёх уравнений, но неизвестных четыре: A, B, C, D. Если наша плоскость не проходит через начало координат, то мы можем D приравнять 1, если же проходит, то $D = 0$.

Объяснение этому простое: мы можем поделить каждое уравнение системы на D, от этого уравнение не изменится, но вместо D будет стоять 1, а остальные коэффициенты будут в D раз меньше.

После подстановки $D = 1$ ($D = 0$) будем иметь три уравнения и три неизвестные, поэтому сможем решить систему.

Любой вектор, перпендикулярный плоскости α, называется ***нормальным вектором*** или ***нормалью плоскости.***



Интересный факт: Координаты нормали плоскости равны коэффициентам A, B и C уравнения плоскости, к которой эта нормаль проведена, т.е.
Если плоскость задана уравнением

$$\boxed{A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0, \text{ то } \vec{n}\{A, B, C\}}$$

Эту особенность нормали иногда можно использовать для более быстрого составления уравнения плоскости.

Пример 1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $K(1; 2; 3), P(0; 1; 0), L(1; 1; 1)$.
Решение:
Подставим координаты этих трёх точек в уравнение плоскости, берём $D = 1$, и решим полученную систему.

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 2 + C \cdot 3 + 1 = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + 1 = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Перепишем систему в упрощённом виде:

$$\begin{cases} A + B \cdot 2 + C \cdot 3 + 1 = 0, \\ B + 1 = 0, \\ A + B + C + 1 = 0. \end{cases}$$

Найдём из второго уравнения значение B и подставим в первое и третье уравнение:

$$\begin{cases} A - 2 + 3C + 1 = 0, \\ B = -1, \\ A = -C. \end{cases}$$

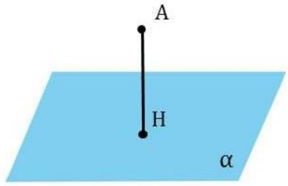
Подставим в первое уравнение $A = -C$ и решим полученное уравнение.
Получим: $A = -0{,}5, B = -1, C = 0{,}5, D = 1$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид:
$-0{,}5x - y + 0{,}5z + 1 = 0.$

Можно умножить обе части уравнения на 2 или – 2, чтобы коэффициенты уравнения стали целыми числами: $-x - 2y + z + 2 = 0$ или $x + 2y - z - 2 = 0$.

4. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.



Зная координаты некоторой точки $M(x_M; y_M; z_M)$ и уравнение плоскости $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, легко найти расстояние от точки до плоскости по формуле:

$$\boxed{\rho = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C \cdot z_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Пример 2. Найдите расстояние от точки $H(1; 2; 0)$ до плоскости, заданной уравнением $2x + 3y - \sqrt{2}z + 4 = 0$.

Решение:

Из уравнения плоскости сразу находим коэффициенты:

$A = 2, B = 3, C = -\sqrt{2}, D = 4.$

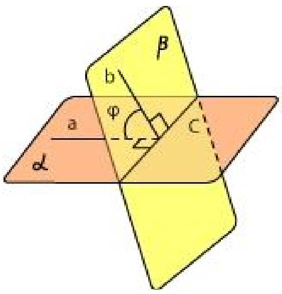
Подставим их в формулу для нахождения расстояния от точки до плоскости:

$$\rho = \frac{\left|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot 0 + 4\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{12}{\sqrt{16}} = 3.$$

Ответ: $\rho = 3.$

5. Угол между плоскостями

Угол между плоскостями – это угол между перпендикулярами к линии их пересечения, проведенными в этих плоскостях.



Иногда в задачах по стереометрии просят найти угол между плоскостями. В этом случае нужно найти уравнения этих плоскостей и воспользоваться ещё одной формулой.

Пусть даны два уравнения плоскостей:

$A_1 \cdot x_1 + B_2 \cdot y_1 + C_2 \cdot z_1 + D_1 = 0$ и $A_2 \cdot x_2 + B_2 \cdot y_2 + C_2 \cdot z_2 + D_2 = 0.$

Тогда угол между этими плоскостями можно найти по формуле:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2} \cdot \sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}}}$$

Пример 3. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями:

$3x + 2y + 3z - 6 = 0$ и $x - y + 2z + 1 = 0.$

Решение:

Исходя из заданных уравнений плоскостей, найдём коэффициенты A, B и C.

$A_1 = 3; B_1 = 2; C_1 = 3; A_2 = 1; B_2 = -1; C_2 = 2.$

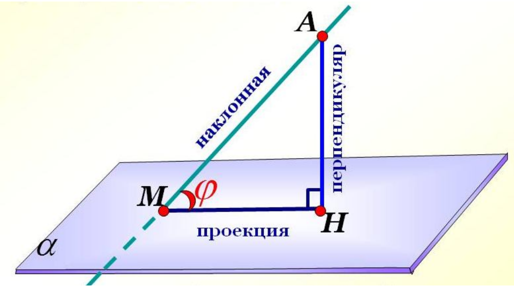
Теперь воспользуемся формулой для нахождения угла между плоскостями:

$$\cos\alpha = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{7}{2\sqrt{33}}$$

Ответ: $\cos\alpha = \frac{7}{2\sqrt{33}}.$

6. Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту плоскость и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой её проекцией на плоскость.



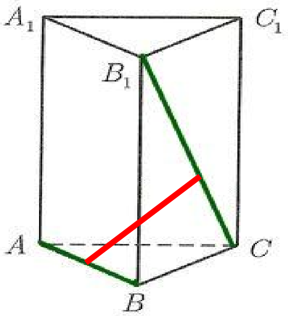
Формула нахождения угла между прямой и плоскостью:

$$\boxed{sin\varphi = \frac{|A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

где $\vec{a}\{x, y, z\}$ – любой вектора прямой;
A, B, C – коэффициенты в уравнении плоскости $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$ или координаты нормали к рассматриваемой плоскости $\vec{n}\{A, B, C\}$.

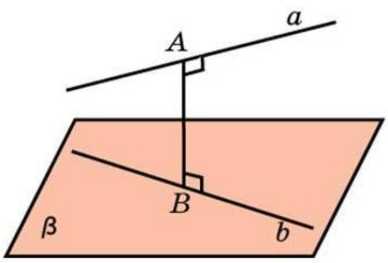
7. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстоянием между скрещивающимися прямыми является длина их общего перпендикуляра. Этот факт не всегда удобен для решения задач, т.к. трудно понять, как провести этот общий перпендикуляр, и тем более как вычислить его длину.



В таком случае можно использовать другую теорию:

Если даны две скрещивающиеся прямые, то через одну из них нужно провести плоскость, параллельную другой прямой. Расстояние от любой точки первой прямой до параллельной плоскости, проходящей через вторую скрещивающуюся прямую, и будет являться ***расстоянием между скрещивающимися прямыми.***



Таким образом, для решение задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми нужно использовать формулу нахождения расстояние от точки до плоскости (см. пункт 4).