⑤ Логарифмические неравенства

5.1

1) $\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3)$ $(-\sqrt5;-2)\cup(1;\sqrt5)$

2) $\log_3(x^2-x) \geq \log_3(3x+2)$ $(-\frac{2}{3};2-\sqrt6]\cup[2+\sqrt6;+\infty)$

3) $\left(\frac12\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$ $(-2;-1]$

4) $\log_{\frac{\sqrt2+\sqrt{13}}{5}} 4 \geq \log_{\frac{\sqrt2+\sqrt{13}}{5}}(5-2^x)$ $[0;\log_2 5)$

5) $\log_{\frac{\sqrt3+\sqrt{19}}{6}} 5 \geq \log_{\frac{\sqrt3+\sqrt{19}}{6}}(7-2^x)$ $[1;\log_2 7)$

5.2 Введение новой переменной:

1) $\log_2^2 x+6>5\log_2 x$ $(0;4)\cup(8;+\infty)$

2) $\log_2^2 x+5\log_2 x+6>0$ $(0;\frac18)\cup(\frac14;+\infty)$

3) $\log_3^2 x+2>3\log_3 x$ $(0;3)\cup(9;+\infty)$

4) $(\log_2^2 x-2\log_2 x)^2<11\log_2^2 x-22\log_2 x-24$ $(\frac14;\frac12),(8;16)$

5) $(\log_2^2 x-2\log_2 x)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$ $(\frac18;\frac12),(8;32)$

6) $(\log_2(x+4,2)+2)(\log_2(x+4,2)-3)\geq 0$ $(-4,2;-3,95],[3,8;+\infty)$

7) $\dfrac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\geq 2\log_2 x$ $(0;0,5],(\sqrt2;2\sqrt[4]{2}]$

8) а) $\dfrac{5\lg^2 x-1}{\lg^2 x-1}\geq 1$ б) $\dfrac{5\log_2^2 x-100}{\log_2^2 x-25}\geq 4$ а) $(0;\frac1{10}),\{1\},(10;+\infty)$ б) $(0;\frac1{32}),\{1\},(32;+\infty)$

9) $\dfrac{(\log_4 x+2)^2}{\log_4^2 x-9}\geq 0$ $(0;\frac1{64}),\{\frac1{16}\},(64;+\infty)$

10) $\log_2^2(25-x^2)-7\log_2(25-x^2)+12\geq 0$ $(-5;-\sqrt{17}],[-3;3],[\sqrt{17};5,$

11) $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geq 0$ $(-5;-\sqrt{20}],\{0\},[\sqrt{20};5)$

12) $\lg^4 x-4\lg^3 x+5\lg^2 x-2\lg x\geq 0$ $(0;1],\{10\},[100;+\infty)$

5.3. Свойства логарифмов:

1) $\log_4(16-16x)<\log_4(x^2-3x+2)+\log_4(x+6)$ $x=-2$

2) $\log_{0,6}(18-18x)\leq\log_{0,6}(x^2-6x+5)+\log_{0,6}(x+4)$ $(-4;-1]$

3) $\log_{\frac12}(10-10x)\leq\log_{\frac12}(x^2-5x+4)+\log_{\frac12}(x+1)$ $(-1;1)$

4) $\log_4(6-6x)\leq\log_4(x^2-5x+4)-\log_4(x+3)$ $(-3;-2]$

5) а) $\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\leq\log_5(1-x)\cdot(x^2-8x-8)$ $(-2;-1]$

б) $\log_2((x-1)(x^2+3))\leq\log_2(4x-x^2-3)+\log_2(5-x)$ $(1;1,5]$

в) $\log_{\frac14}((2-x)(x^2+7))\leq\log_{\frac14}(x^2-5x+6)+\log_{\frac14}(5-x)$ $[1;2)$

г) $\log_{\frac13}((4-x)(x^2+29))\leq\log_{\frac13}(x^2-10x+24)+\log_{\frac13}(7-x)$ $[1;4)$

д) $\log_5((3-x)(x^2+2))\geq\log_5(x^2-7x+12)+\log_5(5-x)$ $[2;3)$

е) $\log_3((2-x)(x^2+5))\geq\log_3(x^2-5x+6)+\log_3(4-x)$ $[1;2)$

6) а) $\log_{11}(8x^2+7)-\log_{11}(x^2+x+1)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$ $(-\infty;-12],(-\frac{35}{8};0]$

б) $2\log_7(x\sqrt2)-\log_7\left(\frac{x}{1-x}\right)\leq\log_7\left(8x^2+\frac1x-5\right)$ $(0;\frac15],[\frac{\sqrt2}{2};1)$

в) $\log_2(17x^2+16)-\log_2(x^2+x+1)\geq\log_2\left(\frac{x}{x+10}+16\right)$ $(-\infty;-23],(-\frac{160}{17};0]$

г) $\log_2(4x^2-1)-\log_2 x\leq\log_2\left(5x+\frac9x-11\right)$ $(\frac12;1],[10;+\infty)$

д) $\log_7(2x^2+12)-\log_7(x^2-x+12)\geq\log_7\left(2-\frac1x\right)$ $(\frac12;\frac43],[3;+\infty)$

е) $\log_7(49x^2-25)-\log_7 x\leq\log_7\left(50x-\frac9x-10\right)$ $(\frac57;2],[8;+\infty)$

7) $\log_3\frac1x+\log_3(x^2+3x-9)\leq\log_3\left(x^2+3x+\frac1x-10\right)$ $[2;+\infty)$

8) $\log_5(3x+1)+\log_5\left(\frac{1}{72x^2}+1\right)\geq\log_5\left(\frac{1}{24x}+1\right)$ $[-\frac16;-\frac1{24}),(0;+\infty)$

9) а) $\log_2\left(\frac1x-1\right)+\log_2\left(\frac1x+1\right)\leq\log_2(27x-1)$ $[\frac13;1)$

б) $\log_3\left(\frac1x-1\right)+\log_3\left(\frac1x+1\right)\leq\log_3(8x-1)$ $[\frac12;1)$

в) $\log_7\left(2+\frac2x\right)-\log_7(x+3)\leq\log_7\frac{(6+x)}{x^2}$ $[-2;-1),(0;9]$

5.4

1) $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0$ $\quad (\frac{1}{9};\frac{1}{3}),[3^{-\frac{2}{3}};1),(3;+\infty)$

2) $\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \ge 2$ $\quad (\frac{4}{3};1+\frac{1}{\sqrt[4]{27}}],(2;4]$

3) $\log_2 0{,}5x \ge \log_{16x} 2 \cdot \log_4 16x^4$ $\quad (\frac{1}{16};\frac{1}{8}],[4;+\infty)$

4) $\log_2 16x \ge \log_{0{,}5x} 2 \cdot \log_4 16x^4$ $\quad [\frac{1}{8};2),[4;+\infty)$

5) $\log_{2x} 0{,}25 \ge \log_2 32x - 1$ $\quad (0;\frac{1}{8}],[\frac{1}{4};\frac{1}{2})$

5.5

1) $\log_3(x+2)(x+4) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$ $\quad (-2;3)$

2) $\log_2(x^2+4x) + \log_{0,5}\frac{x}{4} + 2 \ge \log_2(x^2+3x-4)$ $\quad (1;17)$

3) $\log_2^2(4+3x-x^2) + 7\log_{0,5}(4+3x-x^2) + 10 > 0$ $\quad (-1;0),(3;4)$

4) $2\log_9(4x^2+1) \ge \log_3(3x^2+4x+1)$ $\quad (-\infty;-1),(-\frac{1}{3};0],[4;+\infty)$

5) $\log_2\frac{3x-2}{x-1} + 3\log_8\frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1$ $\quad (1-\sqrt{2};\frac{2}{3}),(1;1+\sqrt{2})$

5.6

1) $2\log_2(1-2x) - \log_2(\frac{1}{x}-2) \le \log_2(4x^2+6x-1)$ $\quad [\frac{1}{6};\frac{1}{2})$

2) $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2) \ge 1$ $\quad (2;5]$

3) $1 + \log_6(4-x) \le \log_6(16-x^2)$ $\quad [2;4)$

4) $\log_3(x^2-x-2) \le 1 + \log_3\frac{x+1}{x-2}$ $\quad (2;2+\sqrt{3})$

5) $2\ln\frac{1}{3x-2} + \ln(5-2x) \ge 0$ $\quad (\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{34}}{9}]$

6) $\log_2(x^2-4) - 3\log_2\frac{x+2}{x-2} > 2$ $\quad (-\infty;-2),(6;+\infty)$

7) а) $(2x+1)\log_5 10 + \log_5(4^x-\frac{1}{10}) \le 2x-1$ $\quad (-\log_4 10;-\log_4 5]$

б) $(x+1)\log_3 6 + \log_3(2^x-\frac{1}{6}) \le x-1$ $\quad (-\log_2 6;-\log_2 3]$

в) $2x\log_3 6 + \log_3(4^x-2) \le 2x+1$ $\quad (0{,}5;\log_4 3]$

г) $(x-1)\log_2 6 + \log_2(3^x-1) \le x+1$ $\quad (0;\log_3 4]$

5.7

1) $2\log_2\frac{x+2}{x-3,7} + \log_2(x-3,7)^2 \ge 2$ $\quad (-\infty;-4],(3,7;+\infty)$

2) $2\log_2\frac{x-1}{x+1,3} + \log_2(x+1,3)^2 \ge 2$ $\quad (-\infty;-1,3),[3;+\infty)$

3) $9\log_7(x^2+x-2) \le 10 + \log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}$ $\quad [-9;-2),(1;5]$

4) $11\cdot\log_{13}(x^2-4x-5) \le 12 + \log_{13}\frac{(x+1)^{11}}{x-5}$ $\quad [-8;-1),(5;18]$

5) $11\log_{11}(x^2+x-2) \le 12 + \log_{11}\frac{(x+5)^{11}}{x-4}$ $\quad [-7;-5),(4;15]$

6) $3\log_6(x^2+6x-7) \le 4 + \log_6\frac{(x-1)^3}{x+7}$ $\quad [-13;-7)$

7) $3\log_{11}(x^2+8x-9) \le 4 + \log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}$ $\quad [-20;-9),(1;2]$

8) $11\log_9(x^2-12x+27) \le 12 + \log_9\frac{(x-9)^{11}}{x-3}$ $\quad [-6;3),(9;12]$

9) $7\log_9(x^2+3x-10) \le 8 + \log_9\frac{(x-2)^7}{x+5}$ $\quad [-14;-5),(2;4]$

5.8

1) $\log_2(x+1)^2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4\log_2(x+1) + 4\log_3(-x) + 4 \le 0$ $\quad [-\frac{1}{3};0)$

2) $\log_5(x+2)^2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 4\log_5(x+2) + 4\log_2(-x) + 4 \le 0$ $\quad [-\frac{1}{2};0)$

5.9

1) $\log_{x+2}(36+16x-x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2 \ge 2$ $\quad x=2$

2) $\log_{x+3}(9-x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \ge 2$ $\quad x=-1$

3) $\log^3_{(x-4)}(x+4) - \frac{4}{9}\log^2_{(x-4)}(x+4)^3 + 5\log_{(x-4)}(x^2-16) > 7$ $\quad (5;\frac{9+\sqrt{33}}{2})$

4) $\frac{1}{27}\log^3_{x+2}(x-2)^3 - \frac{1}{5}\log^2_{x+2}(x-2)^5 + 8\log_{x+2}(x^2-4) < 12$ $\quad (2;+\infty)$

5.10

1) $\log_2\frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \ge 0$ $\quad (0;\frac{1}{16}),[\frac{1}{4};2]$

2) а) $\dfrac{\log_4(16x^4)+11}{\log_2^2 x-9} \geq -1$ $\quad (0;\frac{1}{64});\ \{\frac{1}{16}\};\ (64;+\infty)$

б) $\dfrac{\log_3(9x)-13}{\log_3^2 x+\log_3 x^4} \leq 1$ $\quad (0;\frac{1}{81}),\ (1;+\infty)$

в) $\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3} \geq 0$ $\quad [\frac{1}{6};1),\ (216;+\infty)$

3) $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)} \geq \dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$ $\quad (0;\frac{1}{16})\cup\{4\}\cup(64;+\infty)$

4) $\dfrac{\log_8 x}{\log_8(\frac{x}{64})} \geq \dfrac{2}{\log_8 x}+\dfrac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}$ $\quad (0;1);\ 8;\ (64;+\infty)$

5) $\dfrac{\log_2 x}{\log_2(\frac{x}{64})} \geq \dfrac{10}{\log_2 x}+\dfrac{35}{\log_2^2 x-\log_2 x^6}$ $\quad (0;1);\ 32;\ (64;+\infty)$

6) $\dfrac{\log_4 x}{\log_4 \frac{x}{64}} \geq \dfrac{4}{\log_4 x}+\dfrac{8}{\log_4^2 x-\log_4 x^3}$ $\quad (0;1);\ 16;\ (64;+\infty)$

7) $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(\frac{x}{27})} \geq \dfrac{2}{\log_3 x}+\dfrac{5}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}$ $\quad (0;1),\ \{3\},\ (27;+\infty)$

8) $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(\frac{x}{27})} \geq \dfrac{4}{\log_3 x}+\dfrac{8}{\log_3^2 x-\log_3 x^3}$ $\quad (0;1),\ \{9\},\ (27;+\infty)$

9) а) $1+\dfrac{10}{\log_2 x-5}+\dfrac{16}{\log_2^2 x-\log(32x^{10})+30} \geq 0$ $\quad (0;\frac{1}{8}],\ [8;32),\ (32;+\infty)$

б) $1+\dfrac{6}{\log_3 x-3}+\dfrac{5}{\log_3^2 x-\log_3(27x^6)+12} \geq 0$ $\quad (0;\frac{1}{9}],\ [9;27),\ (27;+\infty)$

5.11

1) $\dfrac{\log_2 x\cdot\log_8(4x)}{\log_4(2x)\cdot\log_{16}(8x)}<5$ $\quad (0;2^{-5}),\ (2^{-3};2^{-\frac{9}{7}}),\ (\frac{1}{2};+\infty)$

2) $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}} \leq 1$ $\quad (0;1],\ (2;8),\ (8;32]$

3) $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_{0,125x}2}{\log_{0,5x}16} \leq \frac{1}{4}$ $\quad (0;0,5],\ [1;2)\cup(2;8)$

4) $\dfrac{\log_x 3x^{-1}\cdot\log_x 3x^2}{\log_{3x}x\cdot\log_{3x^{-2}}x}<180$ $\quad (0;\frac{1}{3}),\ (\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt[4]{3}}),\ (\sqrt[4]{3};\sqrt{3}),\ (\sqrt{3};+\infty)$

5.12–19 Метод рационализации:

5.12: 1) $\log_{\frac{x}{3}}(3x^2-2x+1) \geq 0$ $\quad (0;\frac{2}{3}],\ (3;+\infty)$

2) $\log_{7-x}(2x+9) \leq 0$ $\quad (-\frac{9}{2};-4],\ (6;7)$

3) а) $\log_{6x^2+5x}(2x^2-3x+1) \geq 0$ $\quad (-\infty;-1),\ (0;\frac{1}{6}),\ [\frac{3}{2};+\infty)$

б) $\log_{8x^2-23x+15}(2x-2) \leq 0$ $\quad (\frac{15}{8};2)$

в) $\log_{12x^2-5x-2}(4x+1) \leq 0$ $\quad (\frac{2}{3};\frac{3}{4})$

4) $\log_{x-3}(x^2-12x+36) \leq 0$ $\quad (3;4),\ [5;6),\ (6;7]$

5) а) $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leq 0$ $\quad (-2;-1],\ (1;2)$

б) $\log_{x+1}(x-1)\cdot\log_{x+1}(x+2) \leq 0$ $\quad (1;2]$

в) $\log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x) \leq 0$ $\quad (-4;-3],\ (3;4)$

г) $\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x) \leq 0$ $\quad (-5;-4],\ (8;9)$

д) $\log_{2x}(x+4)\cdot\log_x(2-x) \leq 0$ $\quad (\frac{1}{2};1),\ (1;2)$

6) а) $(4x-7)\log_{x^2-4x+5}(3x-5) \geq 0$ $\quad (\frac{5}{3};\frac{7}{4}],\ (2;+\infty)$

б) $(3x+7)\log_{2x+5}(x^2+4x+5) \geq 0$ $\quad [-\frac{5}{2};-\frac{7}{3}],\ (-2;+\infty)$

в) $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geq 0$ $\quad (\frac{5}{2};\frac{13}{5}],\ (3;+\infty)$

7) а) $x \cdot \log_2(6-4x-x^2) \geq 0$ $\quad (-2-\sqrt{10};-5], [0;1]$

б) $x \cdot \log_{x+3}(2x+7) \geq 0$ $\quad (-3;-2), [0;+\infty)$

8) а) $x^2 \log_{243}(4-x) \leq \log_3(x^2-8x+16)$ $\quad [-\sqrt{10};3], [\sqrt{10};4)$

б) $x^2 \log_{512}(x-3) \leq \log_2(x^2-6x+9)$ $\quad (3;4], [3\sqrt{2};+\infty)$

в) $x^2 \log_{512}(x+7) \leq \log_2(x^2+14x+49)$ $\quad (-7;-6], [-3\sqrt{2};3\sqrt{2}]$

г) $x^2 \log_{343}(x+4) \leq \log_7(x^2+8x+16)$ $\quad (-4;-3], [-\sqrt{6};\sqrt{6}]$

5.13

1) $x^2 \log_{16} x \geq \log_{16} x^5 + x \log_2 x$ $\quad (0;1], [5;+\infty)$

2) $x^2 \log_{25} x \geq \log_{25} x^3 + x \log_5 x$ $\quad (0;1], [3;+\infty)$

3) б) $2\log_{(x^2-6x+10)^2}(5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10}(4x^2+7x+3)$ $\quad [1,5;+\infty)$

а) $2\log_{(x^2-8x+17)^2}(3x^2+5) \leq \log_{x^2-8x+17}(2x^2+7x+5)$ $\quad [0;4), (4;7]$

4) $\log_x(x^3-1) \leq \log_x(x^3+2x-4)$ $\quad [1,5;+\infty)$

5.14

1) $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \leq 0$ $\quad (-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}]$

2) $\dfrac{\log_3(x+\frac{4}{5})}{\log_7(x^2-2x+\frac{7}{16})} < 0$ $\quad (-\frac{4}{5};-\frac{1}{4}), (\frac{1}{5};\frac{1}{4}), (\frac{7}{4};\frac{9}{4})$

3) $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} < 0$ $\quad (-\infty;-2), (-\sqrt{2};-1), (1;\sqrt{2}), (2;+\infty)$

4) $\dfrac{2x^2+9x+7}{\log_3(x^2+6x+9)-\log_3 1} \geq 0$ $\quad (-\infty;-4), [-3,5;-3), (-3;-2), [-1;+\infty)$

5) а) $\dfrac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \leq 0$

б) $\dfrac{\log_2(2x^2-17x+35)-1}{\log_7(x+6)} \leq 0$ $\quad (-6;-5), [3;\frac{7}{2}), (5;\frac{11}{2}]$

6) $\dfrac{\log_5(3x^2-11x+1)-1}{7-49^{x-1}} \geq 0$ $\quad (-\infty;-\frac{1}{3}], (\frac{11+\sqrt{109}}{6};4]$

7) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+3}}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)} < 1$ $\quad (-1;0), (1;+\infty)$

8) а) $\dfrac{\log_2(x^2-5x)}{\log_2 x^2} \leq 1$

б) $\dfrac{\log_5(5x-27)}{\log_5(x-5)} \geq 1$ $\quad (5,4;5,5], (6;+\infty)$

в) $\dfrac{\log_5(3x-13)}{\log_5(x-4)} \geq 1$ $\quad (\frac{13}{3};\frac{9}{2}], (5;+\infty)$

5.15

1) $\dfrac{2\log_2(x^2+2x)}{\log_2 x^2} \leq 1$ $\quad [-3;-2), (0;1)$

2) $\dfrac{2\log_4(x^2-2x)}{\log_4 x^2} \leq 1$ $\quad (-1;0), (2;3]$

3) $\dfrac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2} \leq 1$ $\quad (-1;0), (4;5]$

5.16

1) $\log_{x+1}(2x-5)+\log_{2x-5}(x+1) \leq 2$ $\quad (\frac{5}{2};3), \{6\}$

2) $\log_{3x+1}(4x-6)+\log_{4x-6}(3x+1) \leq 2$ $\quad (\frac{3}{2};\frac{7}{4}), \{7\}$

3) $\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1) \leq 2$ $\quad (\frac{5}{4};\frac{3}{2}), \{3\}$

4) $\log_{2x-1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x-1) \leq 2$ $\quad (\frac{5}{4};\frac{3}{2}), \{2\}$

5) $\log_{x^2}(x-5)^2+\log_{(x-5)^2}x^2 \leq 2$ $\quad (-1;0), (0;1), \{2,5\}, (4;5), (5;6$

6) $0,5\log_{x-2}(x^2-10x+25)+\log_{5-x}(-x^2+7x-10) \geq 3$ $\quad (3;4)$

7) $\log_{7-x}(2x+3)\cdot\log_{2x+3}(3x^2) \leq \log_{7-x}(3x+4)\cdot\log_{3x+4}(10x+25)$

$(-\frac{4}{3};-1), (-1;0), (0;5], (6;7)$

5.17

1) $\log_{4-x}(16-x^2)\le 1$ $\quad(-4;-3],(3;4)$

2) $\log_{4-x}\frac{-5-x}{x-4}\le -1$ $\quad(-5;-4],(3;4)$

3) $\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\ge 1$ $\quad(\log_2\frac{2}{3};0),[1;+\infty)$

4) а) $\frac{\log_3(3^x-1)}{x-1}\ge 1$ $\quad(0;1-\log_3 2],(1;+\infty)$

б) $\frac{\log_4(2^x-1)}{x-1}\le 1$ $\quad(1;+\infty)$

5) $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2$ $\quad(-\frac{1}{2};0],[1;4)$

6) $\log_{x+1}(x^3+3x^2+2x)<2$ $\quad(0;\frac{\sqrt5-1}{2})$

7) $\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4}\ge -4$ $\quad[-1;4)$

8) $\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2$ $\quad[-3;2)$

9) $\log_{4-x}\frac{(x-4)^8}{(x+5)}\ge 8$ $\quad(-5;-4],(3;4)$

5.18

1) $\sqrt{\log_{11}(x^2-17x+67)}\cdot(17^x\log_{17}x+17-17\log_{17}x-17^x)\le 0$ $\quad[1;6],[11;17]$

2) $\sqrt{\log_5(x^2-5x+7)}\cdot(9^x\log_9 x+9-9\log_9 x-9^x)\le 0$ $\quad[1;2],[3;9]$

5.19

1) $\log_{x+1}(2x+7)\cdot\log_{x+1}\left(\frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4}\right)\le -2$ $\quad[\sqrt6;+\infty)$

2) $(2^x-3)\cdot(2\log_2 x-1)\cdot\log_2^2 x\le 0$ $\quad[\sqrt2;\log_2 3],\{1\}$

3) $\frac{(x-3)(2^x-1)}{(x^2-5)(\lg(2x^2)-\lg(16-x^2))}\ge 0$

5.20 Показательно-степенное уравнения:

1) $2^{\log_2^2 x}+x^{\log_2 x}\le 256$ $\quad[2^{-\sqrt7};2^{\sqrt7}]$

2) $7^{\log_7^2 x}+x^{\log_7 x}\ge 2\sqrt[4]{7}$ $\quad(0;\frac{1}{\sqrt7}],[\sqrt7;+\infty)$

3) $(x^2+1)^{\lg(7x^2-3x+1)}+(7x^2-3x+1)^{\lg(x^2+1)}\le 2$ $\quad[0;\frac{3}{7}]$

4) $(x^2+2)^{\lg(7x^2-4x+1)}+(7x^2-4x+1)^{\lg(x^2+2)}\le 2$ $\quad[0;\frac{4}{7}]$

5.21 Логарифм от логарифма:

1) $\log_{0,5}\log_3\frac{x-2}{x-4}>0$ $\quad(5;+\infty)$

2) $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x\sqrt{3-x})\ge 0$ $\quad[\frac{-1+\sqrt{13}}{2};2)$

3) $\log_x(\log_9(3^x-9))<1$ $\quad(\log_3 10;+\infty)$

4) а) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3(x^2-4)-1)\ge -1$ $\quad[-\sqrt{31};-\sqrt7),(\sqrt7;\sqrt{31}]$

б) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2(x^2-9)-2)\ge -1$ $\quad[-\sqrt{41};-\sqrt{13}),(\sqrt{13};\sqrt{41}]$

5) а) $\log_2^2(-\log_2 x)+\log_2\log_2^2 x\le 3$ $\quad[\frac{1}{4};\frac{1}{\sqrt[8]{2}}]$

б) $\log_{0,5}^2(-\log_3 x)-\log_{0,5}\log_3^2 x\le 3$ $\quad[\frac{1}{9};\frac{1}{\sqrt[8]{3}}]$

6) $0,5^{-\log_3\log_{\frac{1}{5}}(x^2-\frac{4}{5})}>1$ $\quad(-\frac{3}{\sqrt5};-1),(1;\frac{3}{\sqrt5})$

5.22

1) $\log_7((3^{-x^2}-3)(3^{-x^2+16}-1))+\log_7\frac{3^{-x^2}-3}{3^{-x^2+16}-1}>\log_7(3^{13-x^2}-2)^2$ $\quad(-\infty;-4),(4;+\infty)$

2) $\log_3((2^{-x^2}-3)(2^{-x^2+9}-1))+\log_3\left(\frac{2^{-x^2}-3}{2^{-x^2+9}-1}\right)>\log_3(2^{5-x^2}-2)^2$ $\quad(-\infty;-3),(3;+\infty)$

3) $\log_3((7^{-x^2}-4)(7^{-x^2+9}-1))+\log_3\left(\frac{7^{-x^2}-4}{7^{-x^2+9}-1}\right)>\log_3(7^{6-x^2}-3)^2$ $\quad(-\infty;-3),(3;+\infty)$

4) $\log_5((7^{-x^2}-5)(7^{-x^2+16}-1))+\log_5\left(\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}\right)>\log_5(7^{2-x^2}-1)$ $\quad(-\infty;-4),(4;+\infty)$

5.23

1) $\dfrac{\log_{5^{x+8}} 14}{\log_{5^{x+8}}(x^2-25)} \geq \dfrac{\log_2(x^2+9x+14)}{\log_2(x^2-25)}$ $[-9;-8),(-8;-7),(5;\sqrt{26})$

2) $\dfrac{\log_{9^{x+2}} 729}{\log_{9^{x+2}}(-9x)} \leq \dfrac{1}{\log_9 \log_{\frac{1}{9}} 9^x}$ $[-\sqrt{3};-2),(-2;-1),(-\frac{1}{9};0)$

3) $\dfrac{\log_{2^{x+4}} 4}{\log_{2^{x+4}}(-8x)} \leq \dfrac{1}{\log_2 \log_{\frac{1}{2}} 2^x}$ $[-8;-4),(-4;1),(-\frac{1}{8};0)$

4) $\dfrac{\log_{3^{x+3}} 9}{\log_{3^{x+3}}(-9x)} \leq \dfrac{1}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}$ $[-9;-3),(-3;-1),(-\frac{1}{9};0)$

5) $\dfrac{\log_{3^{x+4}} 27}{\log_{3^{x+4}}(-81x)} \leq \dfrac{1}{\log_3 \log_{\frac{1}{3}} 3^x}$ $[-9;-4),(-4;-1),(-\frac{1}{81};0)$

5.24

1) $\dfrac{\log_{x+3}(x^2-x+30)}{\log_{x+3}(x^2-x-1)} \geq \dfrac{\lg(x^4-2x^3+x^2)}{\lg(x^2-x-1)}$ $(-2;-1),(2;3]$

2) $\dfrac{\log_{x+2}(x-2)+1}{\log^2_{x+2}(x-2)+1} \cdot \left(\log_{x+2}(x-2)+\log_{x-2}(x+2)\right) \geq \log_{x^2-4}(x^2+4x+4)$ $(2;\sqrt{5}),(3;+\infty)$

3) $\dfrac{\log_{x+3}(x-3)+2}{\log^2_{x+3}(x-3)+2} \cdot \left(\log_{x+3}(x-3)+2\log_{x-3}(x+3)\right) \geq \dfrac{3}{2}\log_{x^2-9}(x^2+6x+9)$ $(3;\sqrt{10}),(4;+\infty)$

5.25 логарифмические нер-ва (интересные)

1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x} - \dfrac{1}{2^{1+\lg x}}\right) \geq -1+\lg x$ $[0{,}1;0{,}5]$

2) $\log_{\frac{1}{5}}\left(7^{1+\log_{35} x} - \dfrac{1}{5^{1+\log_{35} x}}\right) \geq \log_{35} x - 1$ $\left[\frac{1}{35};\frac{26}{35}\right]$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{1+\log_6 x} - \dfrac{1}{2^{1+\log_6 x}}\right) \geq 1+\log_6 x$ $\left[\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]$

4) $\dfrac{4}{(\log_{0,8}(x-8)^2)\cdot\log_{0,9}(x+2)} \geq \dfrac{(x+1)^{\log_2(x+1)}}{4\cdot(\log_{0,8}(x-8)^2)\cdot\log_{0,9}(x+2)}$

$[-\frac{3}{4};3],(7;8),(8;9)$.

5.26

1) $\sqrt{x+2}+\log_5(x+3) \geq 0$

2) $\log_2^2(3x-1)+\log^2_{3x-1} 2-\log_2(3x-1)^2-\log_{3x-1} 4+2 \leq 0$